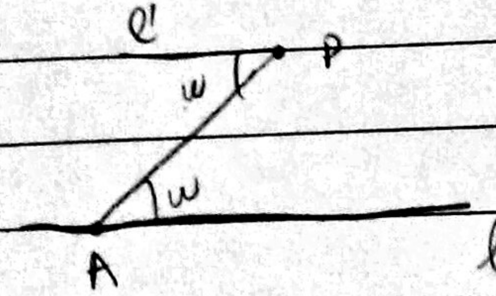
Σχόλια πάνω στην απόλυτη γεωμετρία

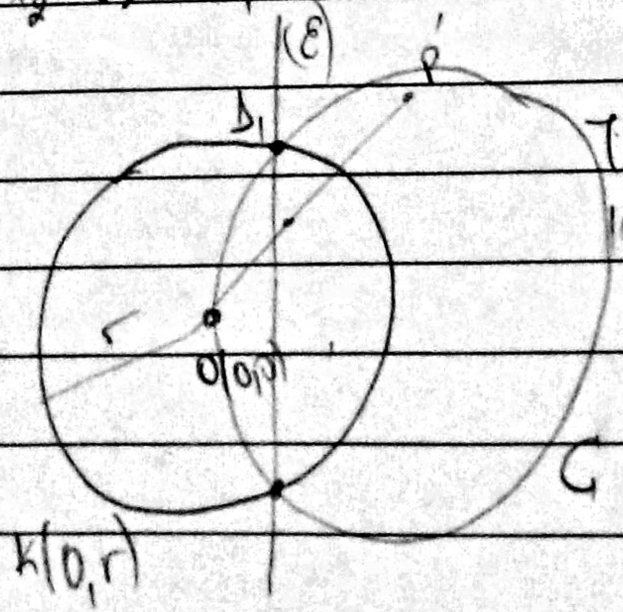


Μεταφέρουμε την $\hat{A}$ "ω" στο σημείο P ($\hat{P}=\omega$) Σχηματίζοντας την l' ευθεία, l & l' δεν τέμνονται! (Αναγκαστικά η παραλληλία προκύπτει!)

Απολ. γ. $\hat{\omega}=\hat{\varphi}$ εντός εναλλάξ ίσες $\Big\} \rightarrow l_1 \parallel l_2$

Ευκλ. γ. $l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \omega=\varphi$

1)



$T: \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

$|OP||OP'| = r^2$

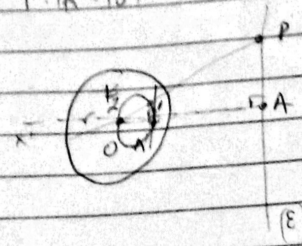
$|O\Delta_1||O\Delta_1'| = r^2$

$C \xrightarrow{T} (C')$

$\Delta_1' = T(\Delta_1)$ $\quad h = T(C \setminus \{0\})$

$\Delta_1' = \Delta_1$ $\quad \Delta_1 \in (h)$

2) $T:\mathbb{R}^2\setminus\{0\}\to\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$



$P\in\varepsilon$

$T(P)=P'$

$|OA||OA'|=r^2$

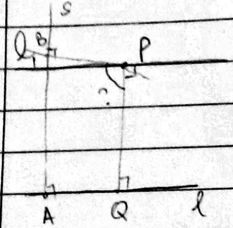
$T(A)=A'$

$T(\varepsilon)=K_2\setminus\{0\} \Leftarrow T(T(\varepsilon))=T(K_2\setminus\{0\})$

$\varepsilon=T(K_2\setminus\{0\})$

(*) Οι αντιστροφές διατηρούν τις γωνίες!

▶ Υπερβολική γεωμετρία (Α5) ∃ ευθεία (ℓ) ή σημείο $Q\notin \ell$, ώστε από το Q να διέρχονται τουλάχιστον 2 παράλληλες!



Βελτιωμένη απόδειξη (από το προηγούμενο μάθημα)

$\ell_1 \parallel \ell$

$A\neq Q$, $A\in \ell$

$PB\neq \ell_1$?, γιατί αν ήταν ίσες θα συνέπιπταν κ' έτσι

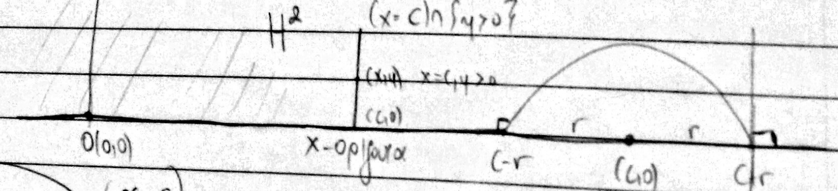
$\ell_1\parallel \ell$ & $PB\parallel \ell$

θα σχηματιζόταν τετράπλευρο AQBP με $\hat{A}=\hat{Q}=\hat{B}=\hat{P}=1L$, ανακύπτει το αξίωμα!

Δύο όμοια τρίγωνα είναι ίσα!

(*) Θα φτιάξουμε ένα μοντέλο στη ΥΓ, ώστε να έχουμε εικόνα των υπερβολικών ευθειών.

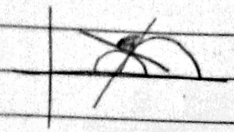
H^2: υπερβολικό επίπεδο $=\{(x,y): y>0\}$



Ευθεία 1ου τύπου $(x=c)$ ευθεία

2ου τύπου $\ell: (x-c)^2+y^2=r^2,\ y>0$

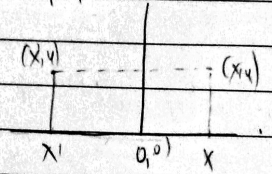
- **Γωνία** δύο Υ-ευθειών είναι η εσωτερική ευκλείδεια γωνία των εφαπτόμενων στο σημείο τομής



- **Δύο ευθείες-Υ** θα λέγονται παράλληλες αν δεν τέμνονται.

- **Ορισμός**: Μια απεικόνιση $f: H^2 \to H^2$ θα λέγεται **Υ-ισομετρία** αν μπορεί να γραφτεί $f = f_1 \circ f_2 \circ \dots \circ f_k$ για κάποιο $k \in \mathbb{N}$, όπου f_i είτε αντιστροφή ως προς $K((c,0), r)$, είτε f_i κατοπτρισμός ως προς ευθεία της μορφής $(x=c')$, $c' \in \mathbb{R}$.

- **Κατοπτρισμός**: $f: H^2 \to H^2$ θα λέγεται κατοπτρισμός $x=c$



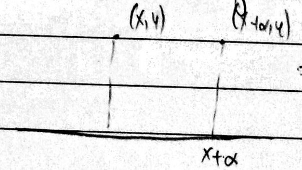
$f(x,y) = (x',y')$

$x - c = c - x'$

$\Rightarrow x' = 2c - x$

$f(x,y) = (2c - x, y)$

- **Ομοιοθεσίες**: $\lambda > 0$ (λόγος) $f = f_1 \circ f_2$: Υ-ισομετρία



$f(x,y) = (x+a, y)$

Παράλληλη μεταφορά κατά a

$(x+a,y) = f = f_1 \circ f_2$, f_i : κατοπτρισμός

$f_1(x,y) = \left(\frac{a}{2} - x, y\right)$

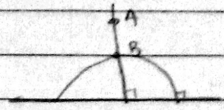
$f_2(x,y) = \left(-\frac{a}{2} - x, y\right)$

Πρόταση: Αν A, B σημεία του H^2 $\exists$ μοναδική Υ-ευθεία χωρίς το A, B

Απόδειξη

1) $(AB) \perp$ x-οριζόντια

$(x=c)$ $\perp$ τύπου Υ-ευθεία μοναδική $A, B \in (x=c)$

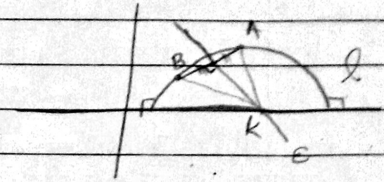


2) $(AB) \not\perp$ x-οριζόντια

Αναζητούμε μια ευθεία τη μορφής (ℓ):

$(x-c)^2 + y^2 = r^2$, $c \in \mathbb{R}$, $y>0$, $r>0$

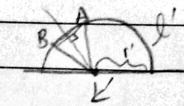
$A, B \in \ell$



Φέρνουμε τη μεσοκάθετο στο AB: (ε).

$(\varepsilon) \cap (x\text{-οριζ.}) = \{K\} \Rightarrow KA = KB$ Αν θεωρούμε το ημικύκλιο ℓ με κέντρο K, ακτίνα $r = KA = KB \Rightarrow A, B \in \ell$ $\quad \ell$: Υ-ευθεία 2ου τύπου

Ισχυρισμός: ℓ: μοναδικό γιατί:

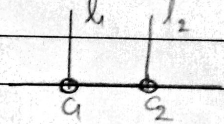


$K'A = K'B \Rightarrow K' \in$ μεσοκάθετο του AB, K': x-οριζ. $\Rightarrow K' = K$

Πρόταση: Δύο Υ-ευθείες (ℓ_1, ℓ_2) του H^2 είναι ισοδύναμες, δηλ. $\exists f$: Υ-ισομετρία $f(\ell_1) = \ell_2$

1η περ. ℓ_1: $(x,y): x = c_1, y>0$ $\quad c_1 \neq c_2$

ℓ_2: $(x,y): x = c_2, y>0$



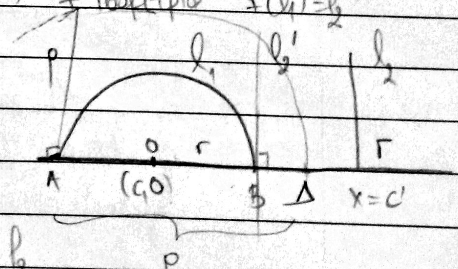
$f(\ell_1) = \ell_2$? Έστω με κατοπτρισμό (;) του μέσου των ℓ_1, ℓ_2, έστω παράλληλη μεταφορά κατά a, $f(x,y) = (x+a, y)$

$a = ;$ ώστε $f(\ell_1) = \ell_2$ με $a = c_2 - c_1$

$f = f_1 \circ f_2$, για κατάλληλες f_i ... $\Rightarrow f$ ισομετρία $f(\ell_1) = \ell_2$

2η περ. ℓ_1: $(x-c_0)^2 + y^2 = r^2$, 2ου τύπου

ℓ_2: 1ου τύπου



Ψάχνουμε μια Υ-ισομετρία $f: H^2 \to H^2$ $f(\ell_1) = \ell_2$

Σύνθεση Υ-ισομετριών, είναι Υ-ισομετρία

Ψάχνουμε την κύκλο αντιστροφής με κέντρο το A, ακτίνα ρ $K(A, \rho)$ ώστε $f(\ell_1) = \ell_2$

Θα βρούμε κατάλληλο σημείο Δ, μεταξύ B & Γ, ώστε $A\Delta = \rho$: ακτίνα κύκλου αντιστροφής ώστε $T(B) = \Gamma$

Μπορώ τα $f(l_1) = l_2$; $Ox \perp l$ $\quad f(Ox') \perp f(l_1)$ (Α ∈ l_2 ...)

Ox' $\quad f(l_1)$ ευθεία $\quad A \in l_1$

Αφού $B \in l_1 \Rightarrow f(B) \in f(l_1) \Rightarrow \Gamma \in f(l_1)$ & $f(l_1) \perp Ox' \Rightarrow f(l_1) = (x = c')$

Γ ευθεία

Για να φτιάξω μια αντιστροφή, αρκεί να ορίσω το Δ $\quad |AΔ|^2 = |AB||AΓ|$

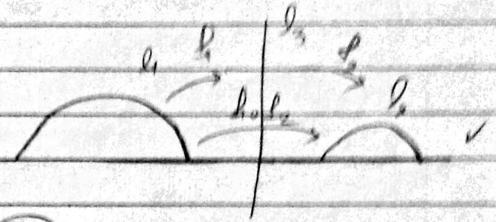
ή το Δ μεταξύ Β, Γ $\quad |AΔ| = \sqrt{|AB||AΓ|}$

$|AB| < \rho < |AΓ|$

Θα μπορούσε να είχε την l_2'

3η περ. $\quad l_1$: 2ου τύπου

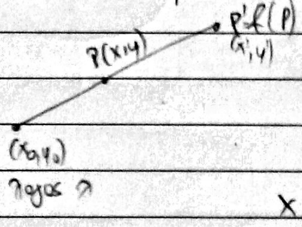
l_2: 2ου τύπου



Ασκήσεις

$\mathbb{R}^2$

1) Βρείτε ομοιοθεσία, η οποία απεικονίζει τον κύκλο $C_1: x^2+y^2=1$ (ακριβώς) στον $C_2: x^2+(y-1)^2=4$



$f(x,y) = (x', y')$ P'

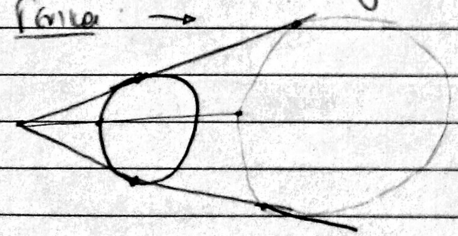
$\vec{OP'} = \lambda \vec{OP}$

$(x'-x_0, y'-y_0) = \lambda(x-x_0, y-y_0)$

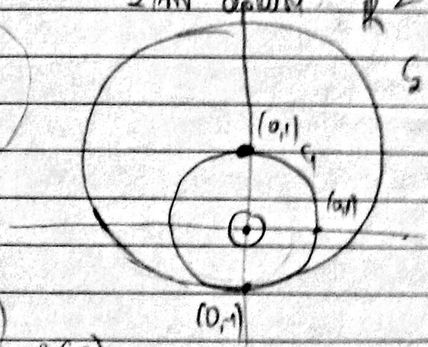
$x' = x_0 + \lambda(x-x_0)$

$y' = y_0 + \lambda(y-y_0)$

Γενικά →



Στην άσκηση $\mathbb{R}^2$



$f(C_1) = C_2$

$f(x,y) = (x_0 + \lambda(x-x_0), y_0 + \lambda(y-y_0))$

(x_0, y_0), $\lambda > 0$

$\{ f((0,-1)), f((1,0)), f((0,1)) \} \in C_2 = f(C_1)$

$\in f(C_1)$

$\in C_1 \quad \in C_1 \quad \in C_1$

$f((1,0)) = \dots = (\lambda + x_0(1-\lambda),\ (1-\lambda)y_0) \in C_2$

$f(0,-1) = ((1-\lambda)x_0,\ -\lambda + (1-\lambda)y_0)$

$f(0,1) = ((1-\lambda)x_0,\ \lambda + (1-\lambda)y_0)$

H/W

1) $[\lambda + x_0(1-\lambda)]^2 + [(1-\lambda)y_0 - \lambda]^2 = 4$

2) ...

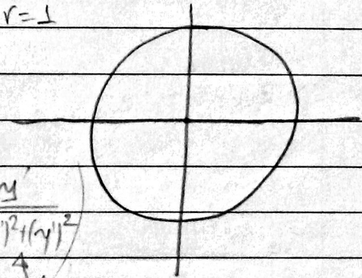
3) ...

$\Rightarrow \lambda = 2$, $x_0 = 0,\ y_0 = -1$

2) Βρείτε την εικόνα της ευθείας: $x+3y-1=0$ ($\mathbb{R}^2$), υπό της αντιστροφής $f(z) = \frac{1}{z}$

$f(z) = \frac{1}{z}$, $\underset{(x',y')}{f(x,y)} = \frac{1}{x-iy} = \frac{x+iy}{x^2+y^2} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{y^2+x^2}\right)$

$f(z) = z_0 + \frac{r^2}{\bar{z}-\bar{z}_0}$, z_0 κέντρο της, $r=1$



Ψάχνω $\{\underset{(x',y')}{f(x,y)} : x+3y-1=0\}$

$\Rightarrow (x,y) = f(x',y') = \left(\underbrace{\frac{x'}{(x')^2+(y')^2}}_{x}, \underbrace{\frac{y'}{(x')^2+(y')^2}}_{y}\right)$

$\rightarrow \frac{x'}{(x')^2+(y')^2} + 3\frac{y'}{(x')^2+(y')^2} - 1 = 0 \Rightarrow x', y' \dots$

$G: (x',y'): \left(x' - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y' - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{10}{4}$ $\quad O(0,0) \in G$ (2)

$f(\varepsilon) \subseteq G \setminus \{(0,0)\}$ (1) άρα $f(\varepsilon) \overset{(1),(2)}{=} G \setminus \{(0,0)\}$

Αντίστροφα $(x',y') \in K \setminus \{(0,0)\}$, θα πάρω τα σημεία $(x',y') = f(x,y)$ ↓, $x = \frac{x'}{(x')^2+(y')^2}$, $y = \frac{y'}{(x')^2+(y')^2}$

H/W

και θα δείξω ότι ισχύει $x+3y-1=0$ ..